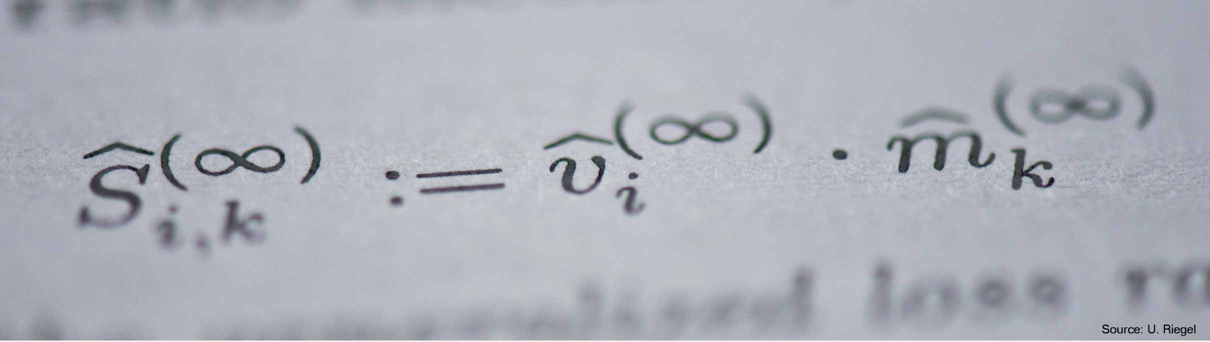


Source: U. Riegel

Ein verallgemeinertes additives IBNR-Verfahren

(A Generalized Loss Ratio Method)

SAV-Tagung, 31. August 2018

Ulrich Riegel

Munich RE

Agenda

Additives Verfahren und additives Modell

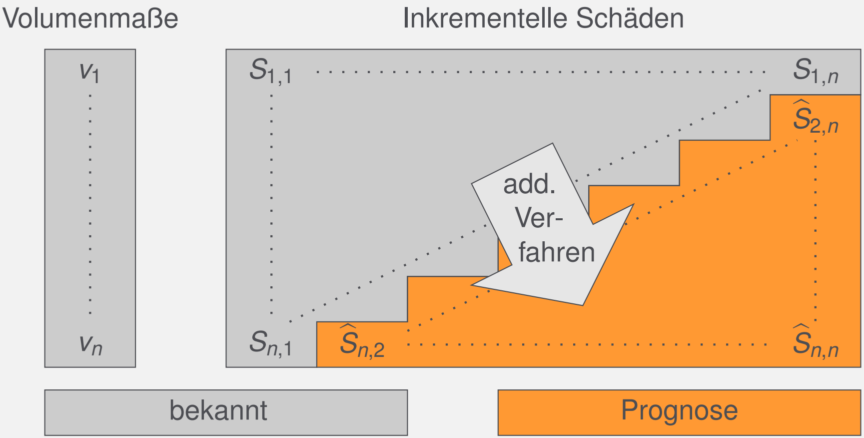
Unsichere Volumenmaße und erweitertes additives Modell

Verallgemeinertes additives Verfahren (Generalized loss ratio method)

Beispiel

Additives Verfahren und additives Modell

Verfügbare Daten und Zielsetzung



Additives Verfahren und additives Modell

Additives Verfahren

Additives Verfahren: Für $i + k > n + 1$ verwenden wir die Prognosen

$$\widehat{S}_{i,k} := v_i \cdot \widehat{m}_k$$

für $S_{i,k}$, wobei

$$\widehat{m}_k := \frac{\sum_{j=1}^{n-k+1} S_{j,k}}{\sum_{j=1}^{n-k+1} v_j} = \sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{v_j}{\sum_{\nu=1}^{n-k+1} v_\nu} \cdot \frac{S_{j,k}}{v_j}.$$

Frage: Warum volumenproportionale Gewichte für die Schadenquoten $S_{j,k}/v_j$?

Antwort: Diese Gewichte minimieren die Varianz der Schätzer $\widehat{m}_k$ im *additiven Modell*!

Additives Verfahren und additives Modell
Additives Modell

Munich RE

Modellannahme 1: Die inkrementellen Schäden $S_{i,k}$, $i, k \in \{1, \ldots, n\}$, sind unabhängig.

Modellannahme 2: Es gibt Parameter $v_1, \ldots, v_n > 0$ und Parameter $m_1, \ldots, m_n$, so dass

$$\mathrm{E}(S_{i,k}) = v_i \cdot m_k$$

für alle $i, k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.

Modellannahme 3: Es gibt Parameter $s_1^2, \ldots, s_n^2 > 0$, so dass

$$\mathrm{Var}(S_{i,k}) = v_i \cdot s_k^2$$

für alle $i, k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.

Frage: Ist das additive Modell realistisch?

Meine Ansicht:

Ja,

zumindest wenn die IBNR-Reserven durch IBNYR dominiert sind,

aber

es ist *nicht* realistisch anzunehmen, dass die Modell-Parameter $v_1, \ldots, v_n$ *bekannt* sind!

Unsichere Volumenmaße und erweitertes additives Modell

Verfügbare Volumenmaße

In der Praxis verwendete Volumenmaße:

- Indexierte Prämie
- Jahreseinheiten (Kraftfahrt)
- Gesamtversicherungssumme (Sach)
- Anzahl Betten (Heilwesen)
- Tonnage (Transport)
- Gehalt/Lohn (Worker's Compensation)
- . . .

Diese Volumenmaße sind nur Näherungen für die *Modell-Volumina* v_i!

Wir nehmen nun an, dass

- die Modell-Volumina (d.h. die Parameter v_i im additiven Modell) unbekannt und
- die gegebenen Volumenmaße $\widehat{v}_i$ Schätzer für die Modell-Volumina v_i sind (d.h. Beobachtungen von Zufallsgrößen).

Unsichere Volumenmaße und erweitertes additives Modell

Erweitertes additives Modell

Modellannahme 4: Für die Schätzer $\widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_n$ der unbekannten Modell-Volumina $v_1, \ldots, v_n$ gilt

$$\frac{\widehat{v}_{i+1}}{\widehat{v}_i} = \frac{v_{i+1}}{v_i} \cdot f_i$$

mit unabhängigen, positiven Zufallsfaktoren f_i, wobei

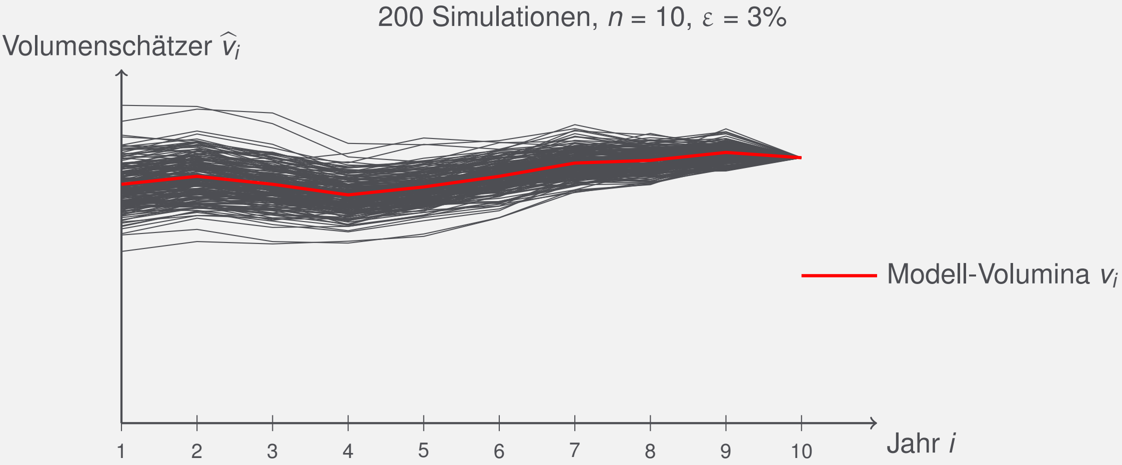
$$E(f_i) = 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(f_i) = \varepsilon^2 > 0.$$

Ferner nehmen wir an, dass die σ-Algebren $\sigma\{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ und $\sigma\{S_{i,k} \mid i, k = 1, \ldots, n\}$ unabhängig sind.

OBdA nehmen wir an, dass $\widehat{v}_n = v_n$.

Unsichere Volumenmaße und erweitertes additives Modell

Simulation der Volumenschätzer



Munich RE

Zur Parameterschätzung benötigen wir eine zusätzliche Verteilungsannahme:

Modellannahme 5: Für eine gegebene Teilmenge $\mathcal{K} \subseteq \{1, ..., n-1\}$ mit $1 \in \mathcal{K}$ sind die Inkremente $S_{i,k}$ lognormal-verteilt für alle $i \in \{1, ..., n\}$ und $k \in \mathcal{K}$.

Empfehlung: Wähle $\mathcal{K}$ so groß wie möglich, d.h.

$$\mathcal{K} := \{k \in \{1, ..., n-1\} \mid S_{i,k} > 0 \text{ für alle } i \text{ mit } i + k \leq n + 1\}.$$

Munich RE

Additives Verfahren (im erweiterten additiven Modell): Für $i + k > n + 1$ verwenden wir die Prognosen

$$\widehat{S}^{\mathbf{w}}_{i,k} := \widehat{v}_i \cdot \widehat{m}^{\mathbf{w}}_k \qquad \text{mit} \qquad \widehat{m}^{\mathbf{w}}_k := \sum_{j=1}^{n-k+1} w_{j,k} \cdot \frac{S_{j,k}}{\widehat{v}_j}$$

für $S_{i,k}$, wobei $w_{j,k}$ Gewichte mit $w_{1,k} + \cdots + w_{n-k+1,k} = 1$ sind.

Bemerkung: Im Vergleich zur obigen Formel

- erlauben wir die Verwendung beliebiger Gewichte (was natürlich auch im additiven Modell erlaubt ist)
- haben wir die unbekannten Modell-Volumina v_i durch die Volumenschätzer $\widehat{v}_i$ ersetzt.

Unsichere Volumenmaße und erweitertes additives Modell

Erweitertes additives Modell

Munich RE

Fragen:

☑ Kann man optimale Gewichte $w_{j,k}$ für das additive Verfahren im erweiterten additiven Modell berechnen?

☑ Kann man die Standardfehler des additiven Verfahrens im erweiterten additiven Modell berechnen?

☑ **Kann man das additive Verfahren verallgemeinern, so dass die Unsicherheit der Volumenmaße berücksichtigt wird?**

Munich RE

Idee hinter dem verallgemeinerten additiven Verfahren:

Ersetze $\widehat{v}_i$ durch *genauere* Volumenschätzer $\widehat{v}_i^{(\infty)}$ und verwende für $S_{i,k}$ die Prognosen

$$\widehat{S}_{i,k}^{(\infty)} := \widehat{v}_i^{(\infty)} \cdot \widehat{m}_k^{(\infty)} \qquad \text{mit} \qquad \widehat{m}_k^{(\infty)} := \sum_{j=1}^{n-k+1} \widehat{h}_{j,k}^{(\infty)} \cdot \frac{S_{j,k}}{\widehat{v}_j^{(\infty)}},$$

wobei $\widehat{h}_{j,k}^{(\infty)}$ näherungsweise optimale Gewichte sind.

Verallgemeinertes additives Verfahren
Idee

Folgerung aus Modellannahme 4:

$$\widehat{r}_{i,(0,0)} := \frac{1}{\widehat{v}_i} \text{ ist ein erwartungstreuer Schätzer für } \frac{1}{v_i}$$

Wir haben aber weitere erwartungstreue Schätzer für v_i^{-1}, die die Schadenabwicklung verwenden:

$$\widehat{r}_{i,(j,k)} := \frac{1}{\widehat{v}_j} \cdot \frac{S_{j,k}}{S_{i,k}} \gamma_{i,k}^{-1} \qquad \text{mit} \qquad \gamma_{i,k} := 1 + \frac{v_i s_k^2}{v_i^2 m_k^2}$$

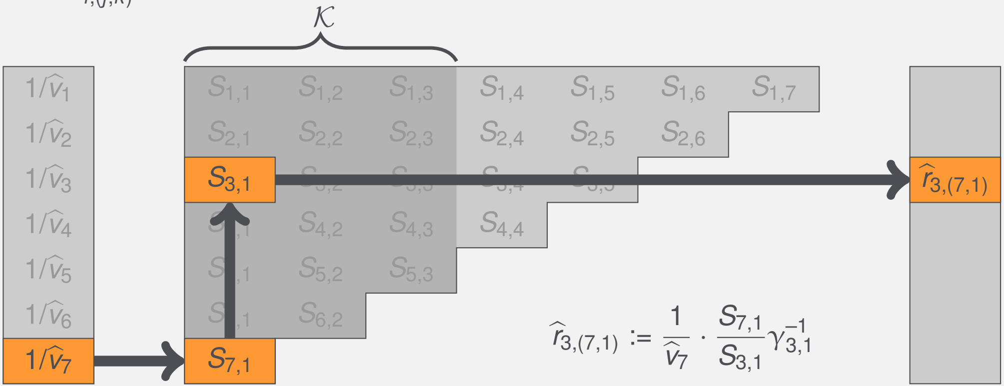
für $i \leq n-1$ und $(j,k) \in \mathcal{I}_i^* := \{(j,k) \,|\, k \in \mathcal{K}, j \neq i \text{ und } \max(i,j) + k \leq n+1\}$.

Bemerkung: Der Korrekturfaktor $\gamma_{i,k}^{-1}$ wird benötigt, da $\mathrm{E}\left(\frac{1}{S_{i,k}}\right) = \frac{\gamma_{i,k}}{\mathrm{E}(S_{i,k})}$.

Verallgemeinertes additives Verfahren

Idee

Schätzer $\widehat{r}_{i,(j,k)}$:



$$\widehat{r}_{3,(7,1)} := \frac{1}{\widehat{v}_7} \cdot \frac{S_{7,1}}{S_{3,1}} \gamma_{3,1}^{-1}$$

Verallgemeinertes additives Verfahren
Idee

Betrachte den Vektor $\widehat{\mathbf{r}}_i := \left(\widehat{r}_{i,(0,0)}\,,\,\left(\widehat{r}_{i,(j,k)}\right)_{(i,j)\in\mathcal{I}_i^*}\right)$ von Schätzern für v_i^{-1}. Man kann die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{R}_i := \mathrm{Cov}(\widehat{\mathbf{r}}_i).$$

berechnen. Dann sind die Komponenten von

$$\mathbf{g}_i := \frac{\mathbf{R}_i^{-1}\mathbb{1}}{\mathbb{1}^T\mathbf{R}_i^{-1}\mathbb{1}}$$

die optimalen Gewichte für die Schätzer und

$$\frac{1}{\widehat{v}_i^*} := \mathbf{g}_i^T\,\widehat{\mathbf{r}}_i$$

ist die Konvexkombination mit der minimalen Varianz.

Verallgemeinertes additives Verfahren

Parameterschätzung

Problem:

Die Objekte $\widehat{\mathbf{r}}_i$, $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{g}_i$ und $\widehat{v}_i^*$ hängen nicht nur von den Beobachtungen

$$\mathbf{X} := (\widehat{v}_1^{-1}, \ldots, \widehat{v}_n^{-1}, (S_{i,k})_{i+k \leq n+1})$$

ab sondern auch von den unbekannten Parametern

$$\Theta = (v_1^{-1}, \ldots, v_n^{-1}, m_1, \ldots, m_n, s_1^2, \ldots, s_{n-1}^2, \varepsilon^2).$$

Daher müssen die Parameter rekursiv geschätzt werden.

Lösung:

Man kann eine Abbildung

$$\boldsymbol{\Psi} = (\Psi_1^v, \ldots, \Psi_n^v, \Psi_1^m, \ldots, \Psi_n^m, \Psi_1^s, \ldots, \Psi_{n-1}^s, \Psi^\varepsilon),$$

angeben, so dass für

$$\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^* := \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{X})$$

gilt

$$\mathrm{E}\left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^*\right) = \boldsymbol{\Theta}$$

(für beliebige Parametervektoren $\boldsymbol{\Theta}$).

Munich RE

Rekursion zur Parameterschätzung:

Wähle Startwerte $\widehat{\Theta}^{(0)}$ und definiere $\widehat{\Theta}^{(\nu)}$ rekursiv durch

$$\widehat{\Theta}^{(\nu+1)} := \Psi(\widehat{\Theta}^{(\nu)}, \mathbf{X}).$$

Wenn die Rekursion konvergiert, dann setzen wir

$$\widehat{\Theta}^{(\infty)} := \lim_{\nu\to\infty} \widehat{\Theta}^{(\nu)}.$$

Hoffnung: Die Schätzer werden in jedem Schritt besser, und $(\widehat{v}_i^{(\infty)})^{-1}$ ist ein genauerer Schätzer für v_i^{-1} als $\widehat{v}_i^{-1}$.

Munich RE

Alternative Interpretation der Schätzer: Es gilt

$$\mathrm{E}\left(\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{X})\right) = \mathrm{E}\left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^*\right) = \boldsymbol{\Theta},$$

d.h. der Parametervektor $\boldsymbol{\Theta}$ ist ein Fixpunkt der Abbildung

$$\mathrm{E}\left(\boldsymbol{\Psi}(\,\cdot\,, \mathbf{X})\right).$$

Wenn die Rekursion konvergiert, dann ist $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(\infty)}$ ein Fixpunkt der Abbildung

$$\boldsymbol{\Psi}(\,\cdot\,, \mathbf{X}),$$

d.h. wir schätzen den Fixpunkt $\boldsymbol{\Theta}$ der *erwarteten* Abbildung $\mathrm{E}\left(\boldsymbol{\Psi}(\,\cdot\,, \mathbf{X})\right)$ durch den Fixpunkt $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(\infty)}$ der *realisierten* Abbildung $\boldsymbol{\Psi}(\,\cdot\,, \mathbf{X})$.

Munich RE

Wir nennen die Schätzer $\widehat{v}_i^{(\infty)}$ *revidierte Volumenschätzer*. Ferner liefert die Rekursion näherungsweise optimale Gewichte $\widehat{h}_{i,k}^{(\infty)}$.

Verallgemeinertes additives Verfahren (Generalized loss ratio method):

Für $i + k > n + 1$ verwenden wir

$$\widehat{S}_{i,k}^{(\infty)} := \widehat{v}_i^{(\infty)} \cdot \widehat{m}_i^{(\infty)} = \widehat{v}_i^{(\infty)} \sum_{j=1}^{n-k+1} \widehat{h}_{j,k}^{(\infty)} \frac{S_{j,k}}{\widehat{v}_j^{(\infty)}}$$

als Prognosen für $S_{i,k}$.

Munich RE

Bemerkungen:

- Anstatt $\widehat{\varepsilon}^{(\infty)}$ kann man auch einen externen Schätzer $\widehat{\varepsilon}_{\text{ext}}$ verwenden („Educated Guess").
- Man kann geschlossene Formeln für die Standardfehler des verallgemeineten additiven Verfahrens angeben. Diese sind jedoch sehr rechenaufwändig. Daher ist ein Simulationsansatz vorzuziehen.
- Die Standardfehler des additiven Verfahrens sind im erweiterten additiven Modell typischerweise höher als im additiven Modell.
- Eine Implementierung ist im `R`-Paket `glrm` verfügbar.

Beispiel

Prämien und Schadendreieck

Indexierte Prämien und inkrementelle Zahlungen für eine deutsche KH-Quote:

i	$\widehat{v}_i$	$S_{i,1}$	$S_{i,2}$	$S_{i,3}$	$S_{i,4}$	$S_{i,5}$	$S_{i,6}$	$S_{i,7}$	$S_{i,8}$
1	316.3	151.7	45.5	7.6	5.9	3.8	3.5	3.1	2.8
2	301.9	147.5	41.5	7.2	4.4	3.1	1.8	2.1	
3	271.3	132.5	42.2	7.3	4.8	3.4	2.2		
4	273.4	140.5	47.2	8.9	5.7	4.1			
5	280.9	137.1	46.6	7.2	5.2				
6	311.4	152.0	50.9	8.7					
7	322.9	166.0	54.9						
8	330.8	170.0							

Beispiel

Konvergenz der $\widehat{\varepsilon}^{(\nu)}$

Konvergenz der $\widehat{\varepsilon}^{(\nu)}$ für verschiedene Startwerte $\widehat{\varepsilon}^{(0)}$:

$\widehat{\varepsilon}^{(0)}$	$\widehat{\varepsilon}^{(1)}$	$\widehat{\varepsilon}^{(2)}$	$\widehat{\varepsilon}^{(3)}$	$\widehat{\varepsilon}^{(5)}$	$\widehat{\varepsilon}^{(10)}$	$\widehat{\varepsilon}^{(20)}$	$\widehat{\varepsilon}^{(100)}$
0.500%	0.959%	1.518%	1.925%	2.357%	2.614%	2.634%	2.634%
2.000%	2.146%	2.306%	2.433%	2.563%	2.629%	2.634%	2.634%
5.000%	3.306%	2.930%	2.796%	2.686%	2.637%	2.634%	2.634%
10.000%	3.918%	3.110%	2.884%	2.712%	2.639%	2.634%	2.634%

$\Rightarrow \widehat{\varepsilon}^{(\infty)} \approx 2.63\%$

Beispiel

Parameterschätzer

Munich RE

Schätzer für die Parameter v_i und s_k^2:

ν	Additives Verfahren $\widehat{v}_\nu$	Additives Verfahren $\widehat{s}_\nu^2$	Verallg. additives Verfahren $\widehat{v}_\nu^{(\infty)}$	Verallg. additives Verfahren $(\widehat{s}_\nu^{(\infty)})^2$
1	316.3	6.50%	295.4	4.28%
2	301.9	5.42%	282.0	3.57%
3	271.3	0.28%	260.3	0.19%
4	273.4	0.15%	270.8	0.10%
5	280.9	0.12%	272.8	0.08%
6	311.4	0.22%	302.9	0.14%
7	322.9	0.13%	321.5	0.09%
8	330.8	0.08%	330.8	0.05%

Munich RE

Prognosen $\widehat{R}_i$ für die Reserven $R_i := \sum_{k=n-i+1}^{n} S_{i,k}$:

i	Additives Verfahren	Verallg. additives Verfahren	Chain Ladder
1	0.00	0.00	0.00
2	2.63	2.63	2.59
3	4.66	4.78	4.80
4	7.00	7.41	7.77
5	10.65	10.99	11.01
6	17.41	17.90	17.87
7	26.68	27.94	28.56
8	79.69	83.01	83.43
gesamt	148.73	154.66	156.02

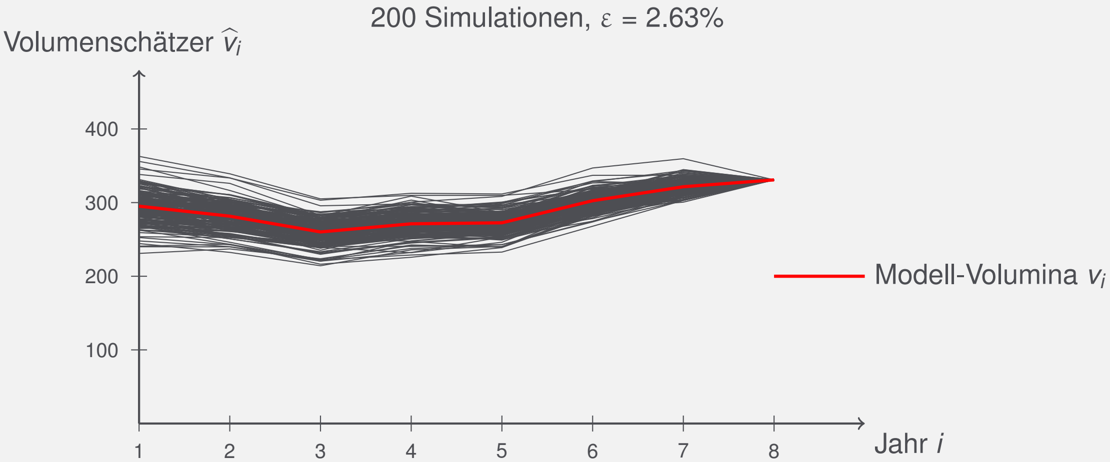
Beispiel
Simulierte Standardfehler

Simulierte Standardfehler der Reserveschätzer im erweiterten additiven Modell:

i	Additives Verfahren	Verallgemeinertes additives Verfahren
1	0.00	0.00
2	0.54	0.54
3	0.78	0.77
4	1.10	1.07
5	1.28	1.22
6	1.63	1.48
7	2.18	1.83
8	5.70	4.62
gesamt	8.96	6.99

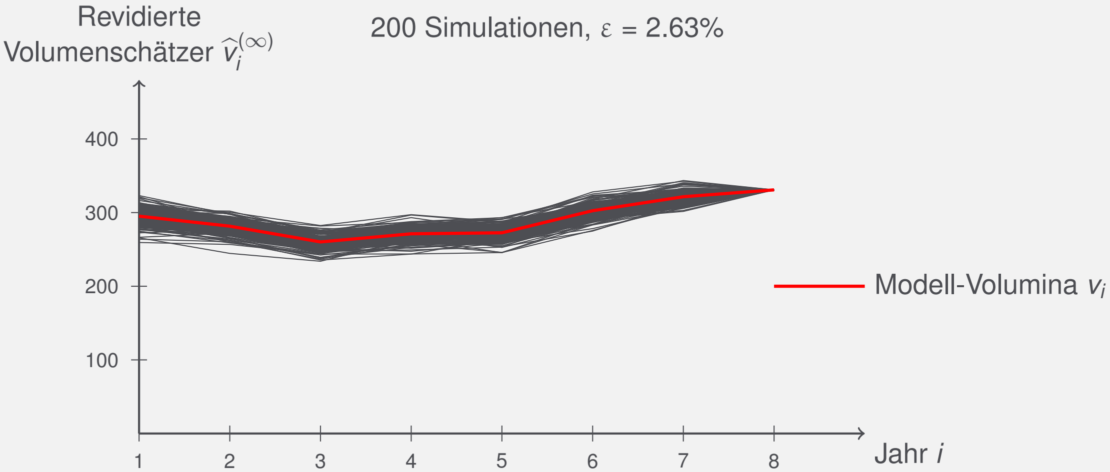
Beispiel

Simulation der Volumenschätzer



Beispiel

Simulation der revidierten Volumenschätzer



Literatur

Ulrich Riegel (2018) *A Generalized Loss Ratio Method Dealing With Uncertain Volume Measures*, Astin Bulletin 48(2), 699–747. DOI:10.1017/asb.2018.5.